

# 行列の固有値、固有ベクトルの求め方

作成者：pre

平成 21 年 8 月 26 日

表題通り固有値 (Eigenvalue)、固有ベクトル (Eigenvector) の求め方です。

## 1 固有値、固有ベクトルの定義と意味

まずは定義から。物理用に、何故それを用いるのかも一寸触れます。

定義 1.1. ( $n$  次正方) 行列  $A$  に対し、

$$Ax = \lambda x$$

なる或る実数  $\lambda$  および或るベクトル  $x$  が存在するとき、この  $\lambda$  を固有値、 $x$  を固有ベクトルと呼ぶ。但し、 $x \neq 0$

この定義を見ると、固有値と固有ベクトルは原則的にワンセットで扱うものであることが分かります。また、左辺の積が定義されていること、それが右辺と等しくなることより、行列  $A$  は自動的に正方行列となります。

この固有値、固有ベクトルを定義するメリットは、「変換に対する向きの不変性」です。つまり、行列  $A$  が表現する一次変換に対し、固有ベクトルは向きを変えないのです。(長さは  $\lambda$  倍されますが。)

もう一寸詳しく言うと：

定義より、ある固有ベクトルの定数倍も固有ベクトルとなるので、固有ベクトルの長さは基本的に自由です。よって、一次独立な固有ベクトルが  $n$  個あれば、それを座標軸にとることで、一次変換を分かりやすくできる、というメリットがあります。(但し、斜交座標になる可能性があるので、ベクトルの内積を考える時などは注意を要します。) 例えば力学の授業で「モード (基本振動)」を求める事に関して、その基本振動は運動方程式を連立した際に現れる行列の固有ベクトルに沿った方向であるから「基本」になるのです。

## 2 固有値、固有ベクトルの求め方

次に求め方です。

練習問題 2.1. 行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  の固有値、固有ベクトルを全て求めよ。

解答：

行列  $A$  の固有値を  $\lambda$ 、固有ベクトルを  $\mathbf{x}$  とおくと、

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

が成立する。(右辺) =  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mathbf{x}$  なので、移項して、

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \dots(1)$$

が成立する。ここで、 $B = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$  とおく。 $B^{-1}$  が存在することを仮定すると、両辺に  $B^{-1}$  を掛けて、 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  を得てしまう。これは  $\mathbf{x}$  が固有ベクトルであるという本来の条件に反するので、仮定「 $B^{-1}$  が存在する」は誤りであると分かった。即ち、 $B$  は逆行列を持たない。よって、

$$\det B = 0$$

と言える。これを計算すると固有値が求まる筈である。計算すると、

$$\begin{aligned} \det B = 0 &\Leftrightarrow (2-\lambda)(3-\lambda) - 1 \cdot 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1, 4 \end{aligned}$$

が分かる。次にそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよう。これは式 (1) を用いれば出来る。

- 固有値  $\lambda$  が 1 のとき  
(1) より

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

が得られる。これより、 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  と置けば、

$$x + y = 0$$

という関係式を得る。この関係式は、例えば  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  のように置いて良い、ということの意味する。(先に述べたように、固有ベクトルは平行なものならば何でも良いのでした。)

- 固有値  $\lambda$  が 4 のとき

固有値が 1 のときと同様にすれば、例えば  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  と取ればよいことが分かる。(練習がてら確かめてみましょう。)

軽めの解説：

最初に移項して、右辺を 0 にすることから始めます。そこから、係数行列の行列式が 0 であることを確かめれば、あとは計算するだけです。そこから固有ベクトルを求めるには、途中式に固有値の具体的な値を代入すればオーケーです。