数学ＩＡ（演習）シケプリ

作成者：猿山

表紙に代えて：知っていて欲しい記号集

∃：存在する　他には「或る」「適当な」「うまくとった」等の表現がある。
∀：任意の　　他には「全ての」「勝手な」「どんな」等の表現がある。
∴：ゆえに、よって
∵：なぜならば、実際
a∈A：　　　要素（元）a は集合Ａに属する
Ａ⊂Ｂ：　　集合Ａは集合Ｂに含まれる　⊃と間違えないように注意。

あとはこのファイル独特の表現。

｛Σ（k=a から k=b まで）（k を含む数式)｝:
　k を含む数式を、k について a から b まで和をとった、その和。

p（自然数)：　プリントのページ数のことです。

このシケプリのコンセプト（重要）

　このシケプリは解答を載せたモノではありません。テスト対策のポイントを（独断と偏見に基づき）纏めたものです。好みに合わないかもしれませんが、お許しを。間違いを見つけてくれたら連絡ください。作成者が喜びます。
　言い訳すると、7/2(木)に§９まで作成していたデータが吹っ飛び、全て作成し直しています。なのでかなり手抜いた部分もあるので、実際のところかなり出来は怪しいです。（とくに§10 以降。）読みにくさもあるので、実際に手を動かしつつ考えてみてください。

目次：だいたい１つの§（セクション）につき１ページ。

ただし§12 以降はそれ以前の話をベースにすれば分かるようになっているので、殆どページ数を割いていない。

§１のポイント

１．不等式の評価を嫌がらないこと！ ２．任意の正数 ε の使い方に慣れよう！ ３．語句の定義は正確に。

・１について

高校までは等式を用いて論証することが殆どでしたが、**大学では不等式を用いて論証する場面の方がかなり多くなります**。いちいち四則演算や不等式の公理を覚えるのはかったるいですが、これをなんとか覚えて、使いましょう。しかし、いちいち公理から出発する必要はありません。むしろ、**中学で習った程度の不等式変形は何も断らずにパッパとやった方がいい**でしょう。

また、大学では**三角不等式の使用頻度がかなりあります**。これは何度も問題を解いてマスターすることをお勧めします。

・２について

これも高校ではあまりやらない、「任意」の扱い方です。この§に限ってはあまり意識しなくても問題ありませんが、この後の§では「任意」が重要になってくる場面が殆どです。問題を解く際には、ε として**極めて小さい数あるいは極めて大きい数**のどちらかを想定すると良いです。

例　プリントの問題（１．３）（ｉ）⇒（ii） $0 < \varepsilon$　より　$b < b + \varepsilon$　である。これと（ｉ）$a \leqq b$　を用いると、 $a < b + \varepsilon$　が導かれる。

ε がでかい時はなんの問題もなく成り立ちそうですが、ε が小さいときはどうか。このとき（ｉ）に含まれる≦が（ii）では＜に変わっているのは何故か。このように考えると、ε が正であることを用いればよいと見当がつくはずです。

・３について

例えば、上限の定義は？と聞かれて答えられますか？α が集合Ａの上限であるとは、「$\beta \geqq a$ が任意の $a \in A$ で成立する」「そのような β のうち最小のものが α である」という２条件が成立することです。このように、**条件が述べられれば解答の際に何を用いればよいかわかる**ので、定義は正確に覚えましょう。その際、単に「上界のうち最小のもの」と覚えて、「上界」の定義が言えない、ということにならないように。

§２のポイント

１．εーN論法が自然な定義と感じられるようになろう。
２．単に極限を求めるだけなら、定理と称して高校段階の計算法でＯＫ.
定性的な問題を解くときにεーN論法を用いよう。
３．アルキメデスの原理を用いるタイミングは、
$1/n \to 0$（$n\to\infty$）あるいは$n\to+\infty$（$n\to\infty$）を使いたい時。

・１について

$a_n \to \alpha$（$n\to\infty$）の正確な定義は「$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \geqq N,\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$」ですが、これでは訳が分からない人もいるでしょう。なので日本語で表現します。
「a_nを、αの近似値を計算するための数列と捉える。a_nとαの誤差を微小な正数ε未満にすることは必ず出来て、nをεに応じて変化する自然数N以上にとればよい。」
この言い換えでなんとか把握してください。

・２について

単に極限を求める問題は多分でないので割愛します。定性的な問題とは、具体的な数字を計算するわけではないが、与えられた条件から大凡どのようなことが言えるかを考えさせる問題のことです。例題を下に。

例　問題（２．７）「（iii）かつ（iv）」⇒$a_n \to a$（$n\to\infty$）（略解）
mを任意の自然数、rを$0 \leqq r \leqq l-1$をみたす任意の整数とし、
$a_{lm+r} \to a$（$n\to\infty$）を示せばよい。r=0は（iii）のことなので、以下$r\neq 0$とする。
$|a_{lm+r} - a|$
$= |\{\Sigma$（k=1からk=rまで）$(a_{lm+k} - a_{lm+k-1})\} + a_{lm} - a|$
$\leqq \{\Sigma |a_{lm+k} - a_{lm+k-1}|\} + |a_{lm} - a|$（三角不等式）
$< (r+1)\varepsilon$　（∵（iii）、（iv））
これより示された。

このように、**三角不等式を用いつつ、いかにεの定数倍を用いて上から評価するか**が焦点になります。

・３について

これは何故かというと、その３つが同値だからです。もし、問題文に「アルキメデスの原理を用いて」と書いてあったならば、おそらく**1/nを用いて上から評価した後に、アルキメデスの原理を用いる**ことになります。具体的な原理の用い方は、配られた解答プリントのp7，p9，p10等にありますから、そっちを参照してください。

§３のポイント

１．有界性＋単調性→収束　の定理はかなり強力な武器。
２．Cauchy の作った定理は大抵使い勝手がよい。
３．Bolzano—Weierstrass の定理は、「収束」よりも「存在」を証明した定理。

・１について

§３は主に「**収束先はどうでもいいから収束を確かめたい**」ときにそれを示すことを目標としています。

そのための武器のうちひとつが「有界な単調数列の収束に関する定理」です。定理の詳しい形は p21 に載っているのでそっち参照。有界性も単調性も、それがある場合には比較的示しやすい概念なので、**これを使えそうな場合はまず試してみましょう。**

・２について

もう１つの武器が Cauchy の収束条件です。こちらも収束先の情報なしに収束を示す概念です。ここの§ではあまり使われていませんが、他の§でも時々顔をだす条件です。したがってこの§でマスターしなくても構いませんが、**他の§の問題でも使えるように！**

なお、Cauchy さんはいろいろな分野で定理を作った人で、テスト範囲に限っても３カ所名前が出ています。すべて有用な定理なので、覚えておいて損はありません。

・３について

Bolzano—Weierstrass の定理（長いですね）とは「有界な実数列は収束する部分列を持つ」という単純な定理です。これは、収束を示すときに使う定理という雰囲気はありますが、実際上これで証明できる場合はおそらく１か２のパターンを使うことで解決できます。この定理を用いるタイミングは、収束する列の「**存在」を示したいとき**に限ると言ってほぼ差し支えないでしょう。

§５，６のポイント

§４は範囲外なので（重要ではありますが）バッサリ割愛。
あと、５は６以降の準備を行う内容ですので、６と一緒にして纏めます。

１．全射の定義は分かってる？（これだけ§５の内容）
２．集積点は収束を考える前提条件に過ぎない。
３．εーδ論法もεーN論法と同じくらい自然な定義だと思えるようになろう。
４.有界な単調数列と同じように、有界な単調関数にも収束に関する定理がある！
５．数列のCauchyの収束条件と同じように、関数にもCauchyの収束条件がある！

・１について

単射の方は簡単にイメージがつくでしょう。Ａを定義域、Ｂを値域とします。「（∀x，y∈Ａ），f(x)=f(y)⇒ｘ＝ｙ」あるいは「（∀x，y∈Ａ），ｘ≠ｙ⇒f(x)≠f(y)」が単射の定義であり、どちらも日本語に還元しやすいです。一方全射は多少難しいです。定義は「∀y∈Ｂ，∃x∈Ａ，f(x)=y」です。そのまま日本語にすれば「どんなｙに対しても、y＝f(x)となるようなｘが存在する」ですが、さらにざっくばらんにすれば、「**f は出力先の全ての領域をカバーしている**」ということです。具体例はf(x)=x等で、反例はf(x)＝exp(x)等です。各自他の例を考えてみると良いでしょう。

・２について

ａが領域Ｅの集積点であるとは、「ａに収束するような数列a_nが、Ｅの中に存在する」ということです。これをざっくばらんに言えば「**ａのすごく近くにはＥがある**」ということになります。これが、集積点が極限を考える上での前提条件になる所以です。

・３について

これもεーN論法同様、正確な定義を述べた後にざっくばらんな言い方をすることにします。f(x)→α（ｘ→ａ）の正確な定義は
「∀ε＞０，∃δ＞０，０＜｜ｘ－ａ｜＜δ⇒｜f(x)－α｜＜ε」であり、これは
「**出力ｆとαの誤差を微小な正数ε未満にすることは必ず出来て、入力ｘとａの誤差をδ未満にすればよい**」ということです。

・４，５について

これらは纏めて解説します。というか数列との類推で作成者が何を伝えたいか察してください。（定理は p44 に載っている上、かなり長いのでそっちを参照してください。）

ここでは例題を２つ出します。１個は完全に誘導無視です。

例　問題（６．４）

仮定より、f は J 上でも広義単調増加する。…①

仮定より、任意の $x \in J$ に対し $f(a) \leqq f(x) \leqq f(b)$ であるから、f は J 上有界である。…②

J の定義より、$\inf J = a$ である…③

以上①②③より、開区間上の有界な単調関数の収束に関する定理を用いれば、

$f(x) \to \inf f(J)$（$x \to a+0$）が導かれるが、これは示すべき事であった。

例　問題（６．５）（３）（誘導無視 ver.）

任意の正数 ε に対し、（アルキメデスの原理より）

正数 δ を $2M\delta < \varepsilon$ を満たすようにとれる。（∵$2M/\varepsilon < 1/\delta$ を変形する）このとき、

$0 < |x-b| < \delta$ かつ $0 < |y-b| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$ を満たす。

（∵ ⇒ の左側の条件が満たされているとき、

$$
\begin{aligned}
&|f(x)-f(y)| \\
&\leqq M|x-y| \quad \text{（仮定より）} \\
&= M|(x-b)+(b-y)| \\
&\leqq M|x-b|+M|b-y| \quad \text{（三角不等式）} \\
&< 2M\delta \quad \text{（⇒の左側の条件）} \\
&< \varepsilon \quad \text{（}\delta\text{の取り方より））}
\end{aligned}
$$

これは Cauchy の収束条件を満たすことを意味するので、

$f(x)$ は $x \to b-0$ のとき収束する。

これが解答（しかも略解ではない）ですが、かなりの飛躍が感じられると思います。これが有界性と単調性、または Cauchy の収束条件を用いることの強みです。なお、関数になると③の条件も必要になるので、忘れずに。**一般に関数に関する定理は前提条件が非常に多く、時に込み入っているので、しっかり細部まで覚えておくように！**

・６について

ε — δ 論法を使えば挟み撃ちの原理は即証明出来るので、定理と呼ばなくてもいいくらいの自明な事柄になります。よって用いるときも、「定理より」等の断りもなしに使って構いません。

§７のポイント

１．**連続の定義それ自体は難しいモノではない。**
２．**p50 のプリントの定理（７．１．２）は、不連続性を示す時に活躍。**
３．**さりげなく最大値、最小値の存在定理と中間値の定理は重要。**
（注）一様連続は範囲外です。

・１について

連続の定義は、９８％「**収束先が f(a)に一致する**」ということで合っています。残り２％はやる気のある人だけプリントで確認すれば十分、というくらいの些末な違いなので割愛。でも正確な定義は上に書いたようなものではないので、**ちゃんとプリントで確認**してね。（p 50 にあります。）§７のポイントは寧ろ２，３ですので、そっちに力入れましょう。

・２について

定理（７．１．２）の対偶を取ってみましょう。

「ある数列 $\{a_n\}$（各項はＥに属する）が存在して、$a_n \to a$ のとき $f(a_n)$は $f(a)$に収束しない」

⇔「f はｘ＝ａで不連続」

が成立するとわかります。したがって、不連続性を示すにあたっては、**うまい数列を一つ見つけてしまえばいい**わけです。これはε―δ論法で直接証明しようとするよりも遥かに楽なやり方なので是非身につけましょう。

尚、これはある意味重要である意味どうでもいいことなのですが、p52 の問題（７．３）は問題文に不備があります。ｆ がｘ＝０で定義されていないのです。ここでは「f(0)をどのように定義しても」という一文が必ず必要なはずです。もしこのような問題が出題されたら、仕方ないのでこの一文があるものと見なして解答しましょう。（因みに、このようなときは $f(a_n)$と $f(b_n)$の極限値が異なり、a_n，b_nいずれも０に収束するようなうまい a_n，b_nを見つけてしまえばいいと分かります。ヒントで述べられている通りですが。）

・３について

存在定理だから重要に決まってます。正確には、**存在を示すことは初年度の学生には大変難しいので、それを示した定理はとてもそのような学生にとって有り難い**、という意味ですが。

そしてまたまた**プリントに誤り**です。**p51 の中間値の定理の３行目、「Ｅの元αが存在する」は「Ｅの元ｃが存在する」に直してください。**

定理の使い方については解答プリント p26 を参考にしてください。

§８のポイント

１．ひたすら逆関数についてです。
２．**p58 定理（８．２）単射と単調性はそこそこの重要性。**
３．逆三角関数は図形的類推も使って良いけど、グラフの方がお勧め。

・（１については省略）　・２について

「微分を使わずに、狭義単調性を示せ」と言われたら、普通閉口するでしょう。そんな問題が出たら、定理（８．２）を（証明を書きつつ）使ってやればいいんです。こう書くと重要そうに見えますが、実際こんな問題出るかどうか怪しいですので、まあそこそこの重要性ってことで。

・３について

たぶん§８のメインはこれと、逆関数の微分などに関する準備です。逆三角関数とは、文字通り「**三角関数に代入したら入力値になるような角度を出力する**」関数です。これだけ聞くと簡単そうですが、複数の三角関数と逆三角関数が合成されるとかなりややこしいです。ポイントは、「**逆三角関数の定義域は限定されている**」ことで、さらなるポイントは「**逆三角関数の値域は主値という値に普通設定されている**」ということです。これにより例えば Arcsin(sin(x))と sin(Arcsin(x))は等しくはなりません。（前者で最終的な出力が $\pi/2$ を越えたり、後者で定義域を x＞1 まで拡大していたりしたら即却下です。）この２つのポイントを同時に把握できるのが「**定義域、値域を明確化して描いた**」逆三角関数のグラフです。実際に解答用紙の端っこにでもお絵かきして考えましょう。

因みに主値について：関数を定義する段階で複数の値を取ることも許容する関数のことを多価関数と呼びますが、この関数のうち「最も主要な」値のことを主値と呼びます。「最も主要な」とは、具体的には何らかの形で０に近いものを主値とすることが多いようです。

下に例題を１つ。

例　問題（８．４）（１）
$\mathrm{Arcsin}(x)=\theta$，$\mathrm{Arccos}(x)=\phi$ とおく。すると、$-1\leqq x\leqq 1$ より、
$\lvert\theta\rvert\leqq\pi/2,\ \ 0\leqq\phi\leqq\pi$ となっている。･･･①
また、$\sin(\theta)=x=\cos(\phi)$なので、$\cos(\pi/2-\theta)=\cos(\phi)$　が成立する。
①に注意すると、$\pi/2-\theta=\phi$　即ち　$\theta+\phi=\pi/2$ を得るが、
これは示すべきことであった。

また、**p60 の問題（８．５）は、すぐ後の§９で逆関数の微分を考える時に非常に便利なツールになる**ので、覚えても損はありませんよ。

§９のポイント

１．微分の定義は一次関数で近似する方式の方が後々便利。
２．逆関数の微分は意外に面倒。
３．１変数ベクトル値関数の微分は、まさに位置と速度の関係！
４．「C^n級関数」の定義は後でよく使うので押さえておこう。

・１について

何故便利か。**後で出てくる Taylor の定理が、この方式における微分の拡張に相当する**からです。

この方式では、f(x)=f(a)＋Ａ(x－a)＋R(x)のように、ｆを一次関数で表し、どうでもいい誤差の部分をＲで表します。なんでどうでもいいかというと、Ｒ(x)/x－a→0（ｘ→ａ）が成立するからです。（つまり、**x－a に比べてＲ(x)は速く収束するから、近似する時のようにｘが a に近いときはＲ≒０と見なせる**。なので、どうでもいいわけです。）で、このＡのことをｘ＝a における微分係数と呼び、Ａ＝f'(a)と書く、というのが定義でした。

・２について

逆関数の微分の面倒さは式を見てもあまり伝わってきませんので、例題を下に。

例　問題（９．４）（**Arcsin** についてのみ） f(x)=sin(x)とおく。このとき f'(x)=cosx なので、f(a)=b とおくと、 $(f^{-1})'(b)=1/f(a)=1/\cos(a)$となる。 （ここで、右辺の a を b で表さなければ、導関数を求めたとは言いにくい。） a=Arcsin(b)なので、（問題（８．５）の結果より） $\cos(a)=(1-b^2)^{1/2}$　であることに注意すると、結局、 $(f^{-1})'(x)=1/(1-x^2)^{1/2}$　となる。

さりげなく問題（８．５）の結果を使っています。これを覚えていないと相当面倒になるのは分かるかと思います。やはり覚えておいて損はなかった。

・３について　（４については省略）

物理の援用ですので、分かり難い人も居るかもしれませんが、その場合は逆に物理を助けると思って、しばしお付き合いを。

物理では変数は時間 t であり、位置ベクトル **r** を微分すると速度ベクトル **v** になるのでした。また、この微分は成分毎に行ってもよかったのでした。この２つさえ分かれば、p65, p66 に書いてある説明は納得がいくと思います。つまり、**r は t によりパラメータ表示されていて、r の接ベクトルは v になっている**のです。

§10，11のポイント

一部一緒に解説したいものがあったので、纏めました。

1．Landauの記号は慣れるまでが大変。慣れれば素晴らしい道具！（§10）
2．Rolleの定理は平均値の定理の雛形。（§11）
3．平均値の定理は２種類ある。やっぱりCauchyさん作の方は使いやすい。（§11）
4．漸近展開は有限次までなら、一意に存在している。（§10と§11）
5．Taylorの定理は、漸近展開をもう少し詳しくしたもの。（§11）

・１について

Landauの記号の定義そのものはプリントp73を見てください。ここでは記号の意味を説明します。Landauの記号でf(x)=o(g(x))（x→a）と書かれているとき、x→aのとき、**f(x)はg(x)に比べ速く0に近づく、あるいはg(x)はf(x)に比べ速く大きくなる**、ということです。O（g(x)）の時はだいたい同じくらいか、あるいはoと同じです。これの何が利点かというと、**o同士の演算や、oとOの演算が分かりやすい**点です。P74のうち、とくに使用頻度が高いのは線型性なので、これを使えるようになりましょう。

・２について

Rolleの定理の正体はまさに平均値の定理の雛形です。「雛形」には２つの意味が込めてあって、平均値の定理の証明をRolleの定理を用いて行う点、Rolleの定理を一般化すると平均値の定理になるという点、この2つの点で「雛形」なのです。したがって、テストそのものには使えないかと思われます。**使うのはまさに平均値の定理の証明においてのみ**ですから、その証明だけ眺めておけばＯＫでしょう。(Taylorの定理の証明にも使うことが出来ますが、Cauchyの平均値の定理を用いた方が比較的楽であるように感じます。)

・３について

一つめの平均値の定理（Cauchyと対比するときはLaglangeの平均値の定理と呼ぶこともある）については割愛します。なかなかこれも有用ですが、さすがにこれはマスターして東大に入ってきたと思うので･･･。

Cauchyの平均値の定理はp79に載っています。これはTaylorの定理の証明に使われたり、L'Hospitalの定理を瞬間で証明したりするのに使われる定理で、**具体的計算もさることながら、定理の証明に力を発揮する**定理です。

なおL'Hospitalの定理については§12で述べます。

・４について

「一意に」は§10に、「存在する」は§11に、それぞれ載っています。
この漸近展開は殆どTaylorの定理と同じ形をしているので、ここで本質的な部分を説明してしまいます。

微分を定義した際、１次関数で近似しました。２次関数で近似することを考えるなら、２次関数より速く０に収束する項が誤差Rとして記述されるはずです。3次関数なら、3次関数より速く０に収束する項が誤差項です。同様に**n次関数で近似したことを考えるのが漸近展開**で、誤差項、即ち**剰余項はn次の関数$(x-a)^n$よりも速く0に収束する項**になります。すなわち、$o((x-a)^n)$が剰余項になるわけです。で、各々の係数は次々に両辺を微分していけばp79に書いてあるように定まります。

・５について

Taylorの定理とは、４の漸近展開を考えたときに、**oの部分をもっと具体的に書くとどのような形をしているか述べた**モノです。これはp79，p80に何種類かの書き方で載っているので、積分表示を除いて好きな形で覚えるとよいでしょう。積分表示は「ある定数c」を含まない点ですぐれていますが、関数が複雑な形をしていると積分そのものが大変で、評価がしづらいのです。

・６について

これはp80に書いてあるので覚えろ、の一言で済んでしまいます。(実際、テスト中に考えて出てくるシロモノではない。) しかし、一旦覚えれば、とくに（２）は**「誤差項が０に収束する」⇔「級数が一致する」と述べているに過ぎない**ので、当たり前に思えるようになります。

§12のポイント

１．p95の定理（12．１．３）はn=1,2で具体的に考えて、ケアレスミスを防ごう。
（注）凸関数は範囲外です。
２．L'Hospitalの定理はCauchyの平均値の定理から直ぐ導けるので、

この§は、応用なので高校段階の知識でもだいたい対応できます。１がやや厳しいですが、具体例を挙げて考えれば間違えることもないとおもうので、そのことだけに一言触れる程度で解説を終えても問題ないと思われます。

§13，14のポイント

1．ベクトルを定義域にもち、値域もベクトル空間であるような関数 f の正体は？
2．開球の概念は、今までに出てきたもので言えば E_δ に近い。
3．開球の概念を用いて今までの話をベクトルに拡張するのがメインテーマ。
4．今までに類似のモノが無かった概念は、§14 の弧状連結のみ。

・1について

行列です。（全くの余談ですが、だからこそベクトル関数の微分係数に当たるモノはヤコビアンになるのだと思います、確証はありませんので注意。）

・2について

開球、とは**半径 r の n 次元球**で、縁を含まないものです。n 次元にビビってはいけません。ただ、ベクトルの成分が n 個あるに過ぎません。このプリントでは開球の中心は殆ど **a** になっています。

・3について

例えば内点は、このシケプリ中ではスペースの都合のため今までには出てきていませんが、実は§9に出てきています。ここで内点とは、すぐ周りの（つまり a あるいは **a** からそう遠くまで離れない）点がすべてEに属しているような点のことで、これと内点の定義を見比べると、ベクトルでも全く同じ意味を持っていることが分かります。

本当に、これぱっかりは**シケプリではなく授業で配布されたプリントとにらめっこ**してください。考えればすぐわかりますから。

・4について

弧状連結とは：
位置ベクトル **a** と **b** があり、この２つのベクトルが表す点と点の間を往（復）するような「ライン」を考える。この「ライン」が、領域Eの外に出ないように引けるとき、Eを弧状連結という。

ただ、全く類似のモノが無いわけではなくて、講義でやった「連結」という概念との関連があります。

最後に

とにかく練習問題をやらなきゃいけないし、授業で配られたプリントの理解もしなきゃいけません。つまり何かというと、このシケプリは万能じゃないということです（終）