力学授業ノート要約

作成者:pre

平成 21 年 8 月 22 日

目 次

初めに

　このプリントは、某氏に「授業ノートと宿題とその解答をうｐしてくれ」という要請を受けて作成されたモノです。しかし、「宿題及び解答は配られているのに、それを再度うｐするのって無駄じゃない？」と思い、授業ノートの要約のみうｐするに到りました。なので、宿題および解答は誰かにコピーしてもらうなりしてね。

1　重心系

この章は主に第５，６回目の授業の要約です。

1.1　重心の定義とは？

定義 1.1. N 個の粒子があり、それらの質量がそれぞれ $m_i(i = 1, 2, \ldots, N)$ で表され、それらの位置ベクトルがそれぞれ $\mathbf{r}_i(i = 1, 2, \ldots, N)$ で表される。このとき、この N 粒子の重心ベクトル $\mathbf{r}_G$ は、

$$\mathbf{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

で表される。

重心に関する諸性質はこの定義から導かれます。

1.2　重心系とは何か？

「ある系 S があったとき、その系の重心ベクトルと共に動く系 S' を考える。この S' が系 S の重心系である。」というのが重心系の定義であると言えます。具体的には、系 S での位置ベクトル $\mathbf{r}$ は、系 S' において新たに $\mathbf{r} - \mathbf{r}_G$ で表されることになります。

例 1.2. 重心系では、全粒子の運動量は $\mathbf{0}$ となる。なぜなら、重心系での運動量 $\mathbf{P}_G$ は

$$\mathbf{P}_G = \sum_{i=1}^{N} m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_G)$$

で表されるが、この右辺は $\mathbf{r}_G$ の定義より計算すれば $\mathbf{0}$ となるからである。（ヒント：シグマ記号の和に関する線型性）

導かれる性質は他にもまだまだありますが、ここでは実用性を考え割愛します。

1.3　特に $N = 2$ のときに成立する性質として何があるか？

二粒子系では重心の定義が以下のように言い換えられます。

性質 1.3. 重心系においては、二粒子の位置ベクトルは重心（つまり重心系における原点）を質量の逆比で内分する。

ちょっと分かり難いかもしれませんが、慣れればこの性質は検算などで役に立ちます。例えば、m_1 が m_2 の二倍であったとき、粒子 1 と重心の距離は、粒子 2 と重心の距離の半分となっているのです。そして粒子 1、重心、粒子 2 はこの順で一直線上に並んでいます。(図を描いてみましょう。)

他にも、こんな性質があります。

性質 1.4. 以下の式は恒等式である。但し、v_G とは重心速度のことである。

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_G^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)^2$$

これは直接計算すれば確かめられます。(やや大変ですが。) この性質を利用して運動エネルギーを計算すると楽になる例が多々あります。(例えば Homework # 5 Problem2　等)

2　減衰振動、過減衰

この章は主に第７，８回目の授業の要約です。

2.1　減衰振動、過減衰とは何か？

あらゆる摩擦 (抵抗) を無視して、バネにつながれた質点の運動を考えるとき、この質点は単振動します。では、この抵抗を考慮して運動を記述するとどうなるのか。これには主に２つのパターンがあります。(正確には３つ目：臨界制動があるのですが、あまりにも些末な為割愛。)
減衰振動：振動の振幅を徐々に減らしながら振動する。
過減衰：あまりにも抵抗が大きすぎて、振動することなく運動が終了する。
の２つです。ググってみれば何かしらグラフが出てくると思うので、見ておくことを勧めます。

2.2　減衰振動、過減衰の方程式はどのような形か？

単振動の運動方程式の一般形は

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

でした。これに速度に応じて大きさ、向きが変わる抵抗力 $c\dot{x}$ が加わった、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad \cdots(1)$$

が減衰振動又は過減衰 (又は臨界制動) を解に持つ方程式です。このように x の t による 2 階常微分 (偏微分ではない、普通の微分を常微分と言います) が含まれる方程式を、2 階常微分方程式と言います。(本当は t ではなくても、y などの別の変数であればよい。)

2.3　２階常微分方程式をどのように解くか？

とくに式 (１) のような形に限定して考えます。まず知っていて欲しいのは次の事実です。冬学期にベクトル空間を習ったら是非この証明も試みてください。

事実 2.1. (１) 式のような微分方程式の一般解は、一次独立な二つの特殊解の一次結合により表される。

つまり、式 (１) の解として $x = f(t), x = g(t)$ の二つが見つかり、$Af(t)+Bg(t) = 0$ が t に依らず成立するような A, B が $A = B = 0$ に限るとき、一般解は任意定数 A, B を用いて $x = Af(t) + Bg(t)$ で表される、ということです。

この事実を踏まえ、具体的に減衰振動、過減衰の問題を解いてみましょう。例として使うのは Homework # 8 Problem1 です。

練習問題 2.1. 質量 $m = 4kg$ の質点がバネ定数 $k = 8kg/s^2$ のバネに繋がれている。運動方向は x 方向 *(*重力の働く方向と垂直*)* のみとする。質点は空気抵抗及び摩擦を受け、速度が $\dot{x}$ のとき、向きも含めて $-c\dot{x}$ の力を受ける。ここで、$c = 8kg/s$ である。ある初期条件を与えたところ、$t = 1$ において $x = 2m, \dot{x} = 1m/s$ となった。初期条件を求めよ。

やや詳しい解答：

m, c, k の値は定まっているので、ここから、減衰振動するか過減衰するかは一意に定まる。(後で判定する。) ひとまず、特殊解を求めよう。以下では簡単のため単位を省略する。特殊解は $x = e^{\omega t}$(ωは複素数) の形で表されると見当をつけて、もとの方程式に代入してみる。すると、

$$4(\omega^2 + 2\omega + 2)e^{\omega t} = 0$$

という方程式が得られる。この方程式は結局括弧で括られた部分の二次方程式であるから、これを解く。すると、

$$\omega = -1 \pm i$$

が得られる。(i は虚数単位) このことより、特殊解として $x = e^{-t}e^{it}$および $x = e^{-t}e^{-it}$ が得られた。ここで、運動が減衰振動か過減衰かを判定できる。特殊解の形をよく見てみると、$e^{\pm it}$ の項は時間の経過と共に振動することが分かる。したがってこれは減衰振動である。(過減衰においてはこの項が無い。) さらに、この二解は一次独立である。(二つの解の一次結合のうち、恒等的に 0 となるようなものは、各項の係数が 0 であるようなもの以外にない。) したがって x の一般解は、(先に述べた事実に注意すると) ある定数 A', B'(どちらも複素数) を用いて

$$\begin{aligned} x &= e^{-t}(A'e^{it} + B'e^{-it}) \\ &= e^{-t}(A\cos t + B\sin t) \end{aligned}$$

と表される。(計算の途中で適切に文字を A, B に置き換えた。) これより $\dot{x}$ は、

$$\dot{x} = e^{-t}\{A(-\cos t - \sin t) + B(\cos t - \sin t)\}$$

となる。ここに $t = 1$ における情報を代入すれば、A, B が求まる。

$$t = 1 \text{ において } x = 2 \text{ より、} \quad 2 = e^{-1}(A\cos 1 + B\sin 1)$$

$$t = 1 \text{ において} \dot{x} = 1 \text{ より、} \quad 1 = e^{-1}\{A(-\cos 1 - \sin 1) + B(\cos 1 - \sin 1)\}$$

この 2 式を整理すると、

$$A = e(2\cos 1 - 3\sin 1), B = e(3\cos 1 + 2\sin 1)$$

が得られるので、初期条件は、

$$x(0) = A = e(2\cos 1 - 3\sin 1), \dot{x}(0) = -A + B = e(\cos 1 + 5\sin 1)$$

であったとわかる。

　この例題が何の戸惑いもなく解けるならば減衰振動についてはほぼ大丈夫でしょう。あとは、一般解の形のうち、振動周期がどこに相当するかを判断できれば言うことナシです。

3　複振動する多粒子系とモード

この章は主に第８回目の授業の要約です。

3.1　モードとは？

２つ以上の物体が互いにバネ等に繋がれて振動することが此処でのテーマです。この振動は、一般には複振動と呼ばれるもので、異なる振動数の単振動の和で記述されます。(実際、粒子が２つのみならば、重心系に移って運動を記述することにより複振動の一般解が高校物理の範囲内で導けます。）しかし、特別な初期条件を物体に与えた時に限り、全体が同じ振動数で振動する場合があります。この振動を特に「(基準) モード」、「基準振動」、「固有振動」と呼ぶのです。この章では系の固有振動を求める方法を学びます。(余談ですが、先ほどの章で述べた微分方程式のベクトル空間的性質から、一般解は全てのモードの一次結合であることが分かります。）

3.2　モードはどうやって求める？

ストラテジーそのものはシンプルです。大凡、「各粒子の変位を成分とするベクトルの振動を考え、行列の言葉で方程式を書き直した後、行列の固有値、固有ベクトルを求め、ベクトルの振動としてモードを記述する」といったところになります。具体的な問題を解いた方が早く納得できると思うので、Homework # 8 Problem3 を題材にします。

練習問題 3.1. 初め、二粒子がそれぞれ、鉛直に垂れ下がった、長さ L の重さの無視できるひもに繋がれている。さらに、重さの無視できるバネ定数 k のバネが、水平に二粒子を繋いでいる。粒子２の質量 m_2 は、粒子１の質量 m_1 の２倍である。二本のひもがともに鉛直に垂れ下がっているとき、バネは自然長である。粒子１の水平方向への変位を $x,$ 粒子２の同方向への変位を y とする。(このとき、x, y は共に L よりは充分に小さい。) このとき、この系のモード及び対応する周期をすべて求めよ。(重力の影響を忘れてはならない。)

やや詳しい解答：

何はともあれ運動方程式を立てる。簡単のため $m_1 = m$ とおく。

$$\text{粒子１：}\quad m\ddot{x} = -mg\frac{x}{L} - k(x-y) \quad \cdots(1)$$

$$\text{粒子２：}\quad 2m\ddot{y} = -2mg\frac{y}{L} + k(x-y) \quad \cdots(2)$$

(1) 式、(2) 式を少し書き直す。これは、ベクトル $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に注目しているからである。

$$(1) \Leftrightarrow \ddot{x} = -\left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right)x + \frac{k}{m}y$$

$$(2) \Leftrightarrow \ddot{y} = \frac{k}{2m}x - \left(\frac{k}{2m} + \frac{g}{L}\right)y$$

これらの式をベクトルと行列の言葉で書き直すと次のようになる。

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right) & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{2m} & \left(\frac{k}{2m} + \frac{g}{L}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots(3)$$

この中に登場した、

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right) & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{2m} & \left(\frac{k}{2m} + \frac{g}{L}\right) \end{pmatrix}$$

の固有値、固有ベクトルを見つけよう。ここで、$\omega_0^2 = \frac{g}{L}$ $\omega_1^2 = \frac{k}{2m}$ とおく。すると先の行列は、

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 + 2\omega_1^2 & -2\omega_1^2 \\ -\omega_1^2 & \omega_0^2 + \omega_1^2 \end{pmatrix}$$

となる。固有値を λ とおくと、

$$(\omega_0^2 + 2\omega_1^2 - \lambda)(\omega_0^2 + \omega_1^2 - \lambda) - 2(\omega_1^2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - (2\omega_0^2 + 3\omega_1^2)\lambda + (\omega_0^2)^2 + 3\omega_0^2\omega_1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - \omega_0^2)\{\lambda - (\omega_0^2 + 3\omega_1^2)\} = 0$$

なので、固有値は $\lambda = \omega_0^2$ 又は $\lambda = \omega_0^2 + 3\omega_1^2$ であることがわかった。固有値が ω_0^2 のときの固有ベクトル、$\omega_0^2 + 3\omega_1^2$ のときの固有ベクトルは計算するとそれぞれ、$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ に平行であることが分かる。

さて、もう殆ど求めるモードは分かったことになる。1 つは、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に平行である場合である。なぜなら $x = y$ とおいてみると (3) 式は

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}x\right) = -\omega_0^2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}x \quad \cdots(3)-1$$

のように変形できるので、結局これは

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \quad \text{かつ} \quad x = y$$

を意味する。従って二粒子が角速度 ω_0 で平行に単振動することが読み取れる。もう１つの場合は $x=-2y$ となる場合で、このようにおいてみると (3) 式は

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} y\right) = -(\omega_0^2+3\omega_1^2)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} y \quad \cdots(3)-2$$

のように変形できるので、結局これは

$$\ddot{y} = -(\omega_0^2+3\omega_1^2)y \quad \text{かつ} \quad x=-2y$$

を意味する。従って二粒子が角速度 $\sqrt{\omega_0^2+3\omega_1^2}$ を保ちつつ逆位相で振動し、粒子１の振幅が粒子２の振幅の２倍であることが読み取れる。

　このように、モードを求める作業の殆どは固有値、固有ベクトルの解析です。殆ど数学であると言っても過言ではない気がします。

4　剛体の運動を記述する法則

この章は主に第９，１０回目の授業の要約です。

4.1　剛体に関する方程式の立て方は？

証明するとあまりに長くなりすぎるので、いきなりですが、ある事実を天下り的に覚えてください。

事実 4.1. 剛体に関する方程式は、剛体を構成する各質点についての運動方程式をすべて立てることにより得られる。ただし、その代わりに剛体の重心に関する運動方程式および、剛体の重心まわりの回転に関する方程式を立てても良い。殆どの場合後者の方が遥かに楽なので、後者を用いて運動を記述する。

ここで、質点の力学には一見無い概念である「回転」という言葉が新たに使われています。この回転について説明するのがなかなか大変なので、細かく説明していきます。

4.2　回転に関して、その１：質点の角運動量とは？

まず、質点の運動方程式から、回転に類する概念を導出します。質点の運動方程式は次のようなものでした。

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}$$

ここで両辺それぞれで、左から $\mathbf{r}$ との外積をとります。

$$m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} \quad \cdots(1)$$

ここで、左辺について次の式を利用します。

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) &= \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \quad (\because \text{積の微分は外積においても成立}) \\
&= \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \quad (\because \text{第一項は同一のベクトルの外積ゆえ}\ \mathbf{0})
\end{aligned}$$

これを利用すると、(1) は次のように書き直せます。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r} \times \mathbf{f} \quad \cdots(1)'$$

この左辺の括弧内に出てきた項を、質点の角運動量と呼びます。(因みに右辺は力のモーメントと呼ばれます。これは覚えておいて欲しい。) この角運動量は実は位置ベクトルの原点を通る、或る軸まわりの回転を表す量となっているのです。ある質点が同じ位置、同じ速さであったとしても、速さの向きにより角運動量 $m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$

の大きさは変わります。例えば、位置ベクトルと平行に質点が進んでいるならば、角運動量の大きさは 0 ですし、位置ベクトルと垂直に質点が進んでいるならば、角運動量の大きさは最大となることが読み取れるからです。いろいろ $\mathbf{r}$ や $\dot{\mathbf{r}}$ を変化させてみて、納得してください。(角運動量は運動している面に対して垂直なベクトルであることはやや注意を要します。)

今までの説明で納得できた人は、次の解釈が最も簡潔に思えるでしょう：
「ベクトルとしての角運動量は、その向きに右ねじを進ませようとしたときのドライバーの回転に喩えることが出来る。」
この解釈が納得できたら、次の「慣性モーメント」を理解する準備が整ったことになります。

4.3 回転に関して、その２：剛体の慣性モーメントとは？

まず、前の章の細かい補足です。質点の角速度を ω とおいたとき、角速度も実は角運動量と同じようなベクトルであって、$\dot{\mathbf{r}} = \omega \times \mathbf{r}$ が成立することは頭に入れておきましょう。(つまり、ωと角運動量ベクトルは 平行になっている訳です。)

ここからが本題です。角運動量と角速度の向きが一致することが分かったので、以下では必要に応じて角運動量の大きさのみに着目して話を進めます。剛体の回転を決める方程式は、実は式 (１)' を重心を通る或る軸周りについて書き直した後、各質点について足し合わせたものに過ぎません。さらに、力のモーメントのうち、内力に由来するものは作用反作用の法則により和をとれば打ち消されます。つまり、剛体に働く外力を $\mathbf{F}_j (j = 1, 2, \ldots)$ とおき、その力の働く点を重心からの位置ベクトルで $\mathbf{R}_j$ とおき、各質点の角運動量を $\mathbf{L}_i (i = 1, 2, \ldots)$ とおけば、次式が成り立つ訳です。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \mathbf{L}_i\right) = \sum_j \mathbf{R}_j \times \mathbf{F}_j \quad \cdots(\text{２})$$

右辺については高校段階で既に扱ったことのある「力のモーメント」の和です。(実は力のモーメントは、回転する面に垂直なベクトルのことだった！) よって左辺について考えてみましょう。向きについては回転する面に垂直な軸であることは分かっています。したがって、冒頭で述べたように大きさについて考えます。

冒頭の補足を頭に入れると、

$$\begin{aligned} L_i &= m r_i \times \dot{r}_i \\ &= m r_i^2 \omega \end{aligned}$$

であることは納得がいくでしょう。(角速度は全ての質点で共通であることに注意してください。もし共通でないならば、質点同士の距離が変わってしまいそれは最早剛体ではなくなってしまうからです。) すると、この和をとれば

$\sum_i L_i = (\sum_i mr_i^2)\omega$ が成立することが分かります。ここで向きについても再度考慮すると、式 (2) は次のように書き直せることが分かります。

$$
\begin{aligned}
(2) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((\sum_i mr_i^2)\omega\right) = \sum_j \mathbf{R}_j \times \mathbf{F}_j \\
&\Leftrightarrow \quad (\sum_i mr_i^2)\dot{\omega} = \sum_j \mathbf{R}_j \times \mathbf{F}_j \\
&\Leftrightarrow \quad I\dot{\omega} = \sum_j \mathbf{R}_j \times \mathbf{F}_j
\end{aligned}
$$

ここで、最後の式はシグマ記号の部分を I でおきなおしました。この I のことを剛体の慣性モーメントと言います。また、この方程式が剛体の (重心を通る、ω に平行な軸まわりの) 回転に関する方程式です。ここでは I についてシグマ記号を用いていますが、実際の剛体は殆ど質点が離散的にではなく、連続的に分布しています。そのようなときにどう計算するのかを考えるのが次節です。

4.4 回転に関して、その３：慣性モーメントの計算法は？

ここでは最初に全般的な注意を述べた後で、具体的な問題を幾つか解くことにします。

全般的に注意しなければいけないことは、慣性モーメントの計算は殆どの場合連続量の足し算、即ち積分を用いて行われることです。具体的には、回転軸からの距離 r が等しい部分の慣性モーメントの計算をして、そののち r について和をとる、ないし積分するのが計算方法となります。積分の場合、微小な距離 $\mathrm{d}r$ を用いて、距離 r から $r+\mathrm{d}r$ までに分布する剛体の部分の微小慣性モーメントを計算するので、その微小量の扱いにも注意を要します。

あとは、練習問題の解答から何をすべきか読み取ってください。

練習問題 4.1. 一様な円盤がある。盤の中心を通り、盤に垂直な軸まわりの慣性モーメントを計算せよ。但し、盤全体の質量を M, 盤の半径を R とする。

やや詳しい解答：

円盤のうち、半径 r から $r+\mathrm{d}r$ の部分の微小慣性モーメントを求める。円盤の密度を ρ とすると、この部分の円盤の質量は $\rho(2\pi r\mathrm{d}r)$ となる。なぜならば、直接計算すると

$$\rho\{\pi(r+\mathrm{d}r)^2\} - \rho(\pi r^2) = \rho\pi\{2r\mathrm{d}r + (\mathrm{d}r)^2\}$$

となるが、$(\mathrm{d}r)^2$ の部分は $2r\mathrm{d}r$ の部分に比べて遥かに小さく、和をとったのち $\mathrm{d}r \to 0$ の極限をとれば、結局この部分は無視しても結果が変わらないからである。した

がって、微小慣性モーメント $\mathrm{d}I$ は、$\mathrm{d}I$=$(\rho 2\pi r\mathrm{d}r)\cdot r^2$ となることがわかった。この量を $r=0$ から $r=R$ まで足し合わせれば、全体の慣性モーメント I が分かる。計算すると、

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{r=0}^{r=R} \mathrm{d}I \\
&= \int_0^R (\rho 2\pi r^3)\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\rho \int_0^R r^3 \mathrm{d}r \\
&= 2\pi\rho \left(\frac{1}{4}R^4\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{M}{\pi R^2}\right)R^4 \quad (\because \rho = \frac{M}{\pi R^2}) \\
&= \frac{1}{2}MR^2
\end{aligned}
$$

である。

このように、慣性モーメントの計算は要領さえ分かってしまえばそんなに難しいものではありません。追加でもう１つ練習問題を。

練習問題 4.2. 半径 R の一様な球体がある。球体の中心を通る或る軸 l まわりの、この球体の慣性モーメントを求めよ。但し、全体の質量は M とする。

やや詳しい解答：

この問題と１つ前の問題で最も異なる点は、微小な部分の取り方を工夫しなければいけない点です。それさえ分かってしまえば、要領は全く同じです。さらに、前問の結果を利用できる点は重要ではないものの、知っていると便利です。

球の中心を点 O とする。点 O から、軸 l にそって距離 x の点を点 P とする。同様に、x が x+dx に変化したとき、点 P が点 P' にうつるとする。点 P を通り軸 l に垂直な面と球体の共有部分 α と、点 P' を通り軸 l に垂直な面と球体の共有部分 α' で球体を切断し、二つの面 α, α' の間に挟まれた部分 S の微小慣性モーメント $\mathrm{d}I$ を計算する。これは実は、

$$\mathrm{d}I = (\alpha\text{を底面とし、高さが }\mathrm{d}x\text{ である円柱 S}'\text{の、軸 l まわりの慣性モーメント})$$

で与えられる。なぜならば、面 α と α' の違いは微小量 $\mathrm{d}x$ に由来するものであり、この違いは、部分 S の高さ $\mathrm{d}x$ を掛けた際に二次の微少量 $(\mathrm{d}x)^2$ として無視できるものになるからである。さらに、球体の密度を ρ として前問の結果を利用すれば、

$$(\text{S}'\text{の軸 l まわりの慣性モーメント}) = \frac{1}{2}\{\rho\pi(R^2-x^2)\mathrm{d}x\}(R^2-x^2)$$

がわかる。これがそのまま $\mathrm{d}I$ のことであるから、あとはこの量を $x = -R$ から $x = R$ まで足し合わせれば球体全体の慣性モーメント I が求まる。計算すると、

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-R}^{R} \left(\frac{1}{2}\{\rho\pi(R^2 - x^2)\}(R^2 - x^2) \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\rho\pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)^2 \mathrm{d}x \\
&= \rho\pi \int_{0}^{R} (R^2 - x^2)^2 \mathrm{d}x \\
&= \rho\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} R^4 \cos^4\theta (R\cos\theta \mathrm{d}\theta) \qquad (x = R\sin\theta \text{と置換した}) \\
&= \rho\pi R^5 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \mathrm{d}\theta \\
&= \rho\pi R^5 \left(\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \\
&= \frac{8}{15}\rho\pi R^5 \\
&= \frac{8}{15} \left(\frac{M}{4\pi R^3/3} \right) \pi R^5 \\
&= \frac{2}{5} M R^2
\end{aligned}
$$

であるとわかる。(途中の積分で Wallis の公式を用いたが、直接計算しても良い。)

なお、２つの練習問題の結果は覚えておいた方が良いです。いちいち計算していたらキリがないので…。

5 Laglange 方程式

この章は主に第１１，１２回目の授業の要約です。

5.1 一般化座標って？

まずは用語の整理をしましょう。いろいろな用語が出てきて、それを説明なしに使われることは一番の混乱のもとですから。

自由度：
「運動を記述するのに必要な、最小の独立な変数の数」と思って差し支えないでしょう。独立な、とは互いを結ぶ関係式が存在しない、くらいに考えておけば良いです。
Laglangean：
「ラグランジアン」と読みます。これは「(系全体の運動エネルギー)−(系全体の位置エネルギー)」で与えられます。
一般化座標：
今まで習ってきた「xyz 座標系」や、「球座標系」、「円柱座標系」などの「具体的な」座標系に対する概念。つまり、変数の数だけが指定されていて、「一般に (変数の取り方に制限はなく、)」変数さえ決まれば良い、という座標系のこと。変数の数は指定されているので、先に述べた「自由度」を求めてから考える。

用語と言ってもこれくらいのものです。これらの概念がどのように扱われるかは次節で。

5.2 Laglange 方程式の立て方は？

「Laglange 方程式」は、解析力学という学問体系における運動方程式のようなものです。これを念頭においてください。ただし、運動方程式から導くことは出来ます。授業ではこれをやりました。
導くことはさておき、Laglange 方程式を使いこなす方に注目しましょう。まずは、Laglange 方程式の立て方を説明します。

1. 系の自由度を求める。
2. 系を記述するのに用いる独立変数を定める。(一般化座標を定める。)
3. Laglangean をその独立変数を用いて計算する。(計算結果を L とおく。)

4. 次式が Laglange 方程式である。(一般化座標を $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ とした。)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ここで、「一般化座標として何をとっても、方程式の外観は変わらない」というのが Laglange 方程式を導入する利点です。何も考えずに計算すれば方程式が半自動的に立ってしまうのですから。具体的にどのように使われているか、はプリントの解説がこのあたりから詳しくなっているので、そっちを見れば充分でしょう。

6　変分法

　この章は主に第１２，１３回目の授業の要約です。
尚、これは最初に数学 IA のプリントに記載したものを一部改変しただけなので、やや数学的色彩の強い内容となっていますが、ご了承をば。

　以下のような量 I を想定してみましょう：ある量 I は、x ではなくて $f(x)$ そのものによって変化する 量です。例えば、

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

とおけば、これは x の関数ではありません。(定積分ですから。) ところが、$f(x)$ の形を変えれば I の値が変わるのも分かります。定積分に限らず、関数 $f(x)$ の形により値が変化する量 I のことを 汎関数と呼びます。
　これから調べたいのは、$f(x)$ の変化が具体的に汎関数 I にどのような変動を与えるかです。例えば、下のような量を I としましょう。

$$I = \int_a^b g(x, f_1(x), f_1'(x), f_2(x), f_2'(x))\mathrm{d}x$$

(但し、g は x の他に関数 f_1, f_2及びその導関数を含む関数である。) さらに、定積分の始点、終点での関数 f_1, f_2 の値は不変であるものとします。このような「端を固定する」条件の下で、定積分を最小にしてみましょう。(力学で描いたグラフを思い出してください。力学では x に相当するのが時間 t であり、関数 f_1, f_2は時間をパラメータ として変化する量に相当しました。)
　変化を調べるには、何事に於いても僅かな変化を考えます。ここでは関数 f_1, f_2 の形を調べたいので、関数 f_1, f_2をそれぞれ僅かな量 $\delta f_1, \delta f_2$ だけ変化させることを考えます。そのとき、汎関数 I は $I + \delta I$ だけ変化した、とします。ここで注意すべきは、固定端で考えているので、

$$\delta f_1(a) = \delta f_2(a) = \delta f_1(b) = \delta f_2(b) = 0 \quad \cdots(1)$$

が成立する点です。ここで、次は δg を $\delta f_1, \delta f_2$ を用いて表すことを考えます。これは難しいのでここでは結論のみ書くと、Chain rule と似た形で、

$$\delta g = \frac{\partial g}{\partial f_1}\delta f_1 + \frac{\partial g}{\partial f_1'}\delta f_1' + \frac{\partial g}{\partial f_2}\delta f_2 + \frac{\partial g}{\partial f_2'}\delta f_2'$$

が成立します。また、これも証明なしで認めてしまうのですが、

$$\delta f_1' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta f_1$$

$$\delta f_2' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta f_2$$

が成立します。これらの結果より、

$$\begin{aligned}
\delta I &= (I+\delta I)-I \\
&= \int_a^b (g+\delta g)\mathrm{d}x - \int_a^b g\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \delta g\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial g}{\partial f_1}\delta f_1 + \frac{\partial g}{\partial f_1'}\frac{\mathrm{d}\delta f_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial g}{\partial f_2}\delta f_2 + \frac{\partial g}{\partial f_2'}\frac{\mathrm{d}\delta f_2}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

が成立する、と分かります。積分の第二項、第四項について考えると、部分積分より第二項は、

$$\begin{aligned}
(\text{第二項}) &= \left[\frac{\partial g}{\partial f_1'}\delta f_1\right]_a^b - \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial g}{\partial f_1'}\right)\delta f_1\mathrm{d}x \\
&= -\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial g}{\partial f_1'}\right)\delta f_1\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

となる。((1) より、部分積分の第一項は 0 となることに注意しよう。) 第四項は添え字を変えればよいので、結局

$$\delta I = \int_a^b \left\{\frac{\partial g}{\partial f_1} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial g}{\partial f_1'}\right)\right\}\delta f_1 + \left\{\frac{\partial g}{\partial f_2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial g}{\partial f_2'}\right)\right\}\delta f_2\mathrm{d}x$$

が成立することになります。ところで、δf_1及びδf_2 がどのような形であっても δI が 0 になる、という条件が満たされれば I が最小になることに注意しましょう。(例えば、ある δf_1 をとると $\delta I > 0$ が成立する場合、関数 f_1を $f_1 - \delta f_1$ に取り替えた方が、I の値は小さくなる。) つまり、以下の式が I を最小にする条件となります。

$$\frac{\partial g}{\partial f_1} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial g}{\partial f_1'}\right) = 0, \frac{\partial g}{\partial f_2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial g}{\partial f_2'}\right) = 0$$

力学に於いては此処までのプロセスは省略し、この条件を用いて汎関数の最小値を求めているのです。尚、今回は変化する関数の数を 2 つにしましたが、数が増えても同様に議論すればよいことは直ぐ分かります。

具体的にどのような問題で使われているか、は Homework # 13 を参照してください。この問題の解説も、やや詳しくなっていますので。