力学過去問解答

作成者：pre

平成 21 年 9 月 3 日

ローマ数字はうまく表示されない可能性があるので、全てアラビア数字に書き直してあります。また、括弧書きの記述は解答用紙に書く必要はないものです。

第１問

(a)(三角関数の微分は、位相を $\frac{\pi}{2}$ だけ進めることと同じ操作であることに注意すると、計算が少し楽になる。かも。)

(1)$f(x)$ を微分していくと、

$$f(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad f'(\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2},\quad f''(\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad f^{(3)}(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2},\quad f^{(4)}(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

がわかるので、Taylor 展開の式に代入して、

$$f(\frac{\pi}{6}+h)\fallingdotseq\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}h-\frac{\sqrt{3}}{4}h^2+\frac{1}{12}h^3+\frac{\sqrt{3}}{48}h^4$$

となる。

(2)$f(x)$ を微分していくと、

$$f(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2},\quad f'(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad f''(\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2},\quad f^{(3)}(\frac{\pi}{6})=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad f^{(4)}(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$$

がわかるので、Taylor 展開の式に代入して、

$$f(\frac{\pi}{6}+h)\fallingdotseq\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}h-\frac{1}{4}h^2-\frac{\sqrt{3}}{12}h^3+\frac{1}{48}h^4$$

となる。

(b)$A\mathbf{x}=\lambda B\mathbf{x}\Leftrightarrow(A-\lambda B)\mathbf{x}=\mathbf{0}\quad\cdots$(あ) に注意する。もし $\det(A-\lambda B)\neq 0$ ならば、$(A-\lambda B)$ には逆行列が存在することになるので、それを式 (あ) の両辺に乗ずると $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ を導くが、これは求めたい答えではない。従って (背理法より)

$\det(A - \lambda B) = 0$ である。これを λ について解けば良い。

$$
\begin{aligned}
\det(A - \lambda B) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \det \begin{pmatrix} 4-3\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 6-2\lambda \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (3\lambda - 4)(2\lambda - 6) - (\lambda - 1)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 5\lambda^2 - 24\lambda + 23 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{12 \pm \sqrt{29}}{5}
\end{aligned}
$$

よって固有値 λ は $\lambda = \dfrac{12 \pm \sqrt{29}}{5}$ であると分かった。
次に固有ベクトル $\mathbf{x}$ を求めたいので、$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく。以下、複号は固有値の表現中の $\pm$ と一致するものとする。

$$
(\text{あ}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 16 \pm 3\sqrt{29} & 7 \pm \sqrt{29} \\ 7 \pm \sqrt{29} & -6 \pm 2\sqrt{29} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}
$$

なので、これより (二式関係式が出てくるが、二つは同値なので片方計算すればよく、)

$$
(7 \pm \sqrt{29})x = (6 \mp 2\sqrt{29})y
$$

という関係が成立することが分かる。これより、固有ベクトルは例えば $\begin{pmatrix} 6 \mp 2\sqrt{29} \\ 7 \pm \sqrt{29} \end{pmatrix}$ のように取れる。(さらに計算すると、これは $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \pm \sqrt{29} \end{pmatrix}$ に平行であると分かるから、こちらを固有ベクトルに取っても良い。基本的にある固有ベクトルをとったとき、それに平行なベクトルは全て固有ベクトルとしてよい。)
(c)(単なる微分の計算です。)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} \\
&= \frac{2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

である。

第２問

(a)(ラグランジュ方程式の立て方が分からない、という人はこないだ作った授業要約シケプリを参照あれ。宣伝ですねw)

(これは不要ではないが解答には書かなくて良い：運動を記述するに当たり必要な定数が足りていないので、質点を吊すヒモの長さを L とおき、重力加速度を g とする。さらに、$x \ll L, y \ll L$ の場合のみ考える。)

一般化座標は、ここでは x,y の二つにする。このとき、

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 \\
V &= \frac{1}{2}k(x-y)^2+m_1g\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2+m_2g\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{y}{L}\right)^2
\end{aligned}
$$

である。

(補足：T は問題ないと思いますが、難しいのは重力による位置エネルギーの求め方だと思います。とくに質量が m_1 である質点 (以下質点１) について考えます。質点１が静止している時のひもの位置を基準にして、このひもがどれだけの角度変位したか、を θ とおきます。すると、重力による位置エネルギーは $m_1g(1-\cos\theta)$ で書けます。ここで、$\frac{x}{L}$ はとても小さいとみなしているので、$\left(\frac{x}{L}\right)^n$ について、n が３以上の ときはこれを無視します。(正確には、位置エネルギーの変化が分かる為には無視する n がいくら以上でなくてはならないかを考えて、無視するオーダーを決める。) すると、$\tan\theta$ の Taylor 展開に注目すれば、

$$
\theta \fallingdotseq \tan\theta \fallingdotseq \frac{x}{L}
$$

が言えることが分かる。(θ^3 以降は無視する訳ですから。) これを利用して $\cos\theta$ の Taylor 展開をすれば、

$$
\cos\theta \fallingdotseq 1-\frac{1}{2}\theta^2 \fallingdotseq 1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2
$$

が分かる。これを重力による位置エネルギーの式 $m_1g(1-\cos\theta)$ に代入すれば、$m_1g\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2$ が位置エネルギーの x による記述であると分かります。質点２につ

いても同様です。補足終わり。)
従ってラグランジアン L は、

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 - \frac{1}{2}k(x-y)^2 - m_1 g \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2 - m_2 g \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{y}{L}\right)^2 \end{aligned}$$

となる。よってラグランジュ方程式は、

$$\begin{aligned} x \text{について} &: \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow m_1\ddot{x} + k(x-y) + m_1 g\frac{x}{L} = 0 \\ y \text{について} &: \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow m_2\ddot{y} - k(x-y) + m_2 g\frac{y}{L} = 0 \end{aligned}$$

となる。(見て分かるように、運動方程式と同値である。)
(b) 簡単のため、以下では $m_1 = m$ とおく。(a) で導いた方程式を変形する。その際

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{g}{L} \\ \omega_1^2 &= \frac{k}{3m} \end{aligned}$$

のように文字を置き直す。すると、(a) で導いた方程式は最終的に

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \omega_0^2 + 3\omega_1^2 & -3\omega_1^2 \\ -\omega_1^2 & \omega_0^2 + \omega_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \cdots (\text{あ})$$

のように変形できる。この式に出てきた 2 次正方行列 A の固有値、固有ベクトルを求めよう。固有値を λ, 固有ベクトルを $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおく。このとき、(論理の運びは**第１問**(b) でやったので省略)

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) = 0 &\Leftrightarrow \{\lambda - (\omega_0^2 + 3\omega_1^2)\}\{\lambda - (\omega_0^2 + \omega_1^2)\} - 3(\omega_1^2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - (2\omega_0^2 + 4\omega_1^2)\lambda + (\omega_0^2)^2 + 4\omega_0^2\omega_1^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - \omega_0^2)\{\lambda - (\omega_0^2 + 4\omega_1^2)\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = \omega_0^2\ ,\ \omega_0^2 + 4\omega_1^2 \end{aligned}$$

より、固有値が求まった。それぞれに対応する固有ベクトルは、

- $\lambda = \omega_0^2$ のとき、

$$\begin{aligned} &(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} 3\omega_1^2 & -3\omega_1^2 \\ -\omega_1^2 & \omega_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

なので、$a=b$ として、たとえば $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ が固有ベクトルとなる。このとき、試しに式 (あ) に x=y を代入してみる。すると、

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}=-\lambda\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}$$

が導けるので、結局 $x=y$ かつ $\ddot{x}=-\lambda x$ が成立する。$x=y$ より、２つの質点は平行に振動する。その角速度 ω は $\omega=\sqrt{\lambda}=\omega_0=\sqrt{\frac{g}{L}}$ で与えられる。これが求める２つの基本振動の内１つ目。周期は、$\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ である。

- $\lambda=\omega_0^2+4\omega_1^2$ のとき、

$$\begin{aligned}&(A-\lambda E)\mathbf{x}=\mathbf{0}\\ \Leftrightarrow&\begin{pmatrix}-\omega_1^2&-3\omega_1^2\\-\omega_1^2&-3\omega_1^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

なので、$3a=-b$ として、たとえば $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ が固有ベクトルとなる。このとき、試しに式 (あ) に $3x=-y$ を代入してみる。すると、

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix}x\\-3x\end{pmatrix}=-\lambda\begin{pmatrix}x\\-3x\end{pmatrix}$$

が導けるので、結局 $3x=-y$ かつ $\ddot{x}=-\lambda x$ が成立する。$3x=-y$ より、二つの質点は逆位相で振動し、振幅は質点１の方が３倍大きい。振動の角速度 ω は $\omega=\sqrt{\lambda}=\sqrt{\omega_0^2+4\omega_1^2}=\sqrt{\left(\frac{g}{L}\right)^2+4\left(\frac{k}{3m}\right)^2}$ で与えられる。これが求める２つの基本振動の内２つ目。周期は、$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{g}{L}\right)^2+4\left(\frac{k}{3m}\right)^2}}$ である。

第３問

簡単のため、この設問では単位を省略する。
特殊解として $x=e^{\omega t}$ を代入する。(ωは一般には複素数であることに注意しよう。) すると、

$$4e^{\omega t}(\omega^2+2\omega+2)=0$$

を得る。結局これは ω に関する二次方程式である。これを解くと、

$$\omega=-1\pm i$$

を得る。(i は虚数単位。) これより物体は減衰振動をする。よって一般解は、適当な定数 A,B,A',B' (全て一般には複素数である。) を用いて、

$$\begin{aligned} x(t) &= A'e^{(-1+i)t} + B'e^{(-1-i)t} \\ &= e^{-t}(A\cos t + B\sin t) \quad \cdots(\text{あ}) \end{aligned}$$

のように書ける。(要は、減衰項 e^{-t} の指数部分の係数が -1 であることと、振動項 $(A\cos t + B\sin t)$ の角振動数が 1 であることがポイント。) このとき、

$$\dot{x}(t) = e^{-t}\{(-A+B)\cos t + (-A-B)\sin t\} \quad \cdots(\text{い})$$

である。式 (あ)、(い) に $t=2$ における値を代入すれば、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} e^{-2}(A\cos 2 + B\sin 2) & = 1 \\ e^{-2}\{(-A+B)\cos 2 + (-A-B)\sin 2\} & = -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \cos 2A + \sin 2B & = e^2 \\ (\cos 2 + \sin 2)A + (-\cos 2 + \sin 2)B & = e^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \cos 2A + \sin 2B & = e^2 \\ \sin 2A - \cos 2B & = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} A & = e^2\cos 2 \\ B & = e^2\sin 2 \end{cases} \end{aligned}$$

となり、初期条件は、

$$\begin{aligned} x(0) &= A = e^2\cos 2 \\ \dot{x}(0) &= -A + B = e^2(-\cos 2 + \sin 2) \end{aligned}$$

であったとわかる。