戸瀬教官 2009 年 夏学期線形代数解答

2010 年 7 月 31 日

はじめに

これは戸瀬信之教官による 2009 年夏学期の期末試験の解答です。
ただ、先生の作ってくださったページに殆ど考え方が書いてあり、問題毎に参考にした URL を載せましたので、考え方が分からなければそちらを見ながら問題を解いて、答があっているかの確認程度に使ってくれるといいと思います。間違いが多々あるかもしれませんが、見つけたら掲示板にでも書き込んでくれるとありがたいです。

1

普通に解けばいいと思います。流石にやり方が分からない方はいないと思うのと、途中式打ち込み面倒なので省略。

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2

余因子展開する時は転置するのを忘れないようにしましょう。

$$\begin{aligned}
|B| &= \begin{vmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (-4)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-4)\cdot(-4) + 1\cdot(-3) + 4\cdot(-3) \\
&= 1
\end{aligned}$$

となるので B^{-1} の (2,1) 成分は

$$\frac{(-1)^{2+1}\tilde{B}_{12}}{|B|} = \frac{1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

3

やり方はここ参照。
C は行基本変形によって

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 16 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 16 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と変形出来るので、ker(C) の基底は

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} \text{と} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Im(C) の基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{と} \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \text{と} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 \\ -14 \end{pmatrix}$$

4

グラムシュミットの直交化法を使う。やり方についてはここを参照してください。計算過程は面倒くさいので結果の 1 つだけ載せます。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{と} \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{と} \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5

最小自乗法を使う。やり方は 4 番の URL の後半を参照してください。

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

6

　やり方はここ参照。一応以下のようになると思います。

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

として、(P は回転行列)

$$P^{-1}FP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

7

　やり方はここの　番参照。一応以下のようになると思います。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

として、

$$P^{-1}GP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$