

2007年度夏学期「数学II」担当 戸瀬信之

I (1)  $A \in M_3(\mathbb{K})$  とする. 数学的帰納法により  $\lambda \in \mathbb{K}$  に対して

$$(\lambda I + A)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k \lambda^k A^{n-k}$$

を示せ.

(2)  $\begin{pmatrix} x & a & b \\ 0 & x & c \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}^n$  を求めよ.

II  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$  に対して逆行列を求めよ.

III  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 6 & 10 & 15 & 21 \\ 4 & 4 & 10 & 20 & 34 \end{pmatrix}$  に対して  $\ker(C)$  と  $\text{Im}(C)$  の基底を 1

組求めよ.

IV  $abc \neq 0$  とする. クラメールの公式を用いて

$$\begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

を解け.

V  $\mathbb{R}^4$  中

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

が張る部分空間  $V$  の正規直交系を 1 組求めよ .

VI  $V$  における  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  を用いて行列

$$D = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3)$$

を定める .  $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^4$  の  $\text{Im}(D)$  への正射影  $\vec{\beta}$  を最小自乗法により求めよ .

VII (1)  $F = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$  を回転行列で対角化せよ .

(2)  $\left( F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$  の  $x^2 + y^2 = 1$  の下での最小値を求めよ . ただし (1) を用いること .