2004 年度夏学期 数学 II　前期末試験 (担当：戸瀬信之)

I　$\mathbb{K}$ 値の 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

に対して、$\det(A) = 0$ ならば

$$A\vec{v} = \vec{0}, \ \vec{v} \neq \vec{0}$$

を満たす $\vec{v} \in \mathbb{K}^3$ が存在することを示せ。

II　実 2 次対称行列

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

に対して、2 次形式

$$(B\vec{v}, \vec{v})$$

を考える。$\vec{v}$ が $||\vec{v}|| = 1$ を満たしながら動くとき、2 次形式の最大値と最小値を求めよ。解法にあたっては、行列の対角化を用いること。

III　実 2 次正方行列

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が、全ての $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$||C\vec{v}|| = ||\vec{v}||$$

を満たすと仮定する。C を全て求めなさい。

IV　実 2 次正方行列

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$$

に対して、Hamilton-Cayley の定理を用いて D^n を計算せよ。

V　次の 2 次曲線を標準形に変換せよ。ただし、座標系の平行移動と回転移動を用いてよい。
(1)$2x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x - 2y = 0$
(2)$x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

IV　実 3 次正方行列

$$D = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

が正則である必要十分条件を求めよ。

VII(1) 3 次元ベクトル

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を考える。原点を通り $\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ が張る平面を V とする。グラム・シュミットの直交化法を用いて

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の V への正射影ベクトル $\vec{c}$ を求めよ。
(2)(1) のベクトル $\vec{c}$ を $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2)$ と $\vec{e}$ で表せ。