問題(7.4)

a, b は $a<b$ である実数。$I=[a, b]$とおく。f は I 上の実数値関数。
f は I 上連続かつ $f(I)\subset I$ であるとする。
このとき、$f(c)=c$ なる $c\in I$ が存在することを示せ。

「ウィロックスの授業でやったよ」とか書いてしまいましたが、これはやっていませんでしたね。失礼しました。

f は I 上連続かつ $f(I)\subset I$ であるとき、区間 I 上でのグラフ $y=f(x)$と、区間 I 上でのグラフ $y=x$ との交点が、区間 I 上で少なくとも 1 個以上存在することを示せば解決します。ヒントにも書いてあるとおり、「中間値の定理」を利用してこれを示していきます。

解 答

$f(I)\subset I$ より、$x\in I$ なる実数 x について、

$$a \leqq f(x) \leqq b$$

が成立する。

よって、

$$a \leqq f(a) \quad かつ \quad f(b) \leqq b \cdots ①$$

が成立する。

$a=f(a)$である場合、a は問題文の c に該当し、$b=f(b)$である場合、b は問題文の c に該当するので、示すべき命題は明らかである。…②

以下、$a\neq f(a)$かつ $b\neq f(b)$の場合を考える。

$g(x)=x-f(a)$ とおくと、①より、

$$g(a)=a-f(a)<0、g(b)=b-f(b)>0 \cdots ③$$

である。

ここで $h(x)=x$ として、$f(x)$, $h(x)$はともに区間 I 上で連続なので、$g(x)=h(x)-f(x)$である $g(x)$も区間 I 上で連続であることを考えると、③より中間値の定理から

$$g(c)=c-f(c)=0 なる \quad c\in(a, b)$$

が存在する。…④

②、④より、$f(c)=c$ なる $c\in I$ が存在することが示された。…■