

＝ 問題(3.5) ＝

$\{a_n\}$  は実数列。 $\{a_n\}$  は Cauchy の収束条件を満たすとする。(1)～(3)を示せ。

(1)  $\{a_n\}$  は有界である。

(2)  $\overline{a_n} - \underline{a_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

(3)  $\overline{a} = \underline{a}$  が成り立ち、 $\{a_n\}$  は  $\overline{a} (= \underline{a})$  に収束する。

ようは、実数列がコーシー列ならば、その数列が収束することを示せということです。そのためには(2)のように上極限と下極限が一致していることを証明すればよいわけです。ただ、これはボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理を前提としているので、まずは(1)のようにコーシー列である  $\{a_n\}$  は有界であることを証明しなくてはならない、ということなのでしょう。(時間の都合上今のところはここではあまり詳しく書かないでおきます)。

**解**

(1) 0 より大きい実数  $\varepsilon$  に対して、ある  $n_1 \in \mathbf{N}$  が存在し、 $n, m \geq n_1$  のとき、 $|a_m - a_n| < \varepsilon$  となるので、

$$a_{n_1} - \varepsilon < a_n < \varepsilon + a_{n_1}$$

である。そこで、

$$M = \text{Max} \{ |a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n_1-1}|, |a_{n_1} - \varepsilon|, |a_{n_1} + \varepsilon| \}$$

とすれば、すべての  $n \in \mathbf{N}$  に対して

$$|a_n| \leq M$$

となる。……■

(2)  $\{a_n\}$  がコーシー列であることから、与えられた正実数  $\varepsilon$  に対して、

$$m, n > M \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

の成り立つ自然数  $M$  が存在する。 $\overline{a}$  が上極限、 $\underline{a}$  が下極限であるとして、この  $\varepsilon$  と  $M$  に対して、

$$n_0 > M \text{ かつ } a_{n_0} > \overline{a} - \frac{\varepsilon}{3}$$

の成り立つ  $n_0$  と、

$$m_0 > M \text{ かつ } a_{m_0} < \underline{a} + \frac{\varepsilon}{3}$$

の成り立つ  $m_0$  が存在する。以上の三つの不等式を合わせると、

$$\frac{\varepsilon}{3} > |a_{n_0} - a_{m_0}| \geq a_{n_0} - a_{m_0} > \overline{a} - \underline{a} - \frac{2}{3}\varepsilon$$

が得られる。上極限と下極限の間には  $\overline{a} \geq \underline{a}$  という不等式が成り立つので、 $\overline{a} - \underline{a} = |\overline{a} - \underline{a}|$ 。これを踏まえて上の不等式の最初と最後を整理すると、

$$|\overline{a} - \underline{a}| < \varepsilon \dots \textcircled{1}$$

となる。つまり  $\overline{a}$  と  $\underline{a}$  の差は任意の正実数より小さい値、すなわち 0 であるということがわかるので、

$$\overline{a_n} - \underline{a_n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

である。……■

(3)  $\overline{a}$  と  $\underline{a}$  の差は(2)より 0 とみなせるので、

$$\overline{a} = \underline{a} \dots \text{■}$$

$\{a_n\}$  は  $\overline{a} (= \underline{a})$  に収束することを示す。

$\overline{a}$  が上極限であることから、与えられた正実数  $\varepsilon$  に対して

$$n > N_+ \Rightarrow a_n < \overline{a} + \varepsilon$$

の成り立つ自然数  $N_+$  が存在する。一方、 $\underline{a}$  が下極限であることから、同じ  $\varepsilon$  に対して

$$n > N_- \Rightarrow a_n > \underline{a} - \varepsilon$$

の成り立つ  $N_-$  が存在する。よって、 $N = \max\{N_+, N_-\}$  とすれば、 $\overline{a} = \underline{a} = a$  とおいて

$$n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

が成り立つことになる。これにより、 $\{a_n\}$  は  $\overline{a} (= \underline{a})$  に収束することが示された。……■

⇒注

(1) は東京大学出版会の「解析入門」の 26 ページも参考にしてください。そこでは「 $1 > 0$  に対して」と考えていますが、このように  $\varepsilon$  とおいて考えても問題はないと思います。現に岩波書店の「解析概論」では  $\varepsilon$  とおいてこのことを証明していました。

(2) でわざわざ  $\frac{\varepsilon}{3}$  とおいたのは、はじめに  $\varepsilon$  とおくと、最後の結果 (つまり(2)の①の式) が  $|\overline{a} - \underline{a}| < 3\varepsilon$  となり、見栄えがイマイチ微妙になってしまうからです。解析入門 I でわざわざ  $\frac{\varepsilon}{2}$  などとおいているのもそのためです。(もちろん  $\varepsilon$  は任意の実数なので  $|\overline{a} - \underline{a}| < 3\varepsilon$  でも全然示したことになるのですけれどね。)

以上、早川 大智が記しました。誤植があったら申し訳ない。