力学解答 (9 月 3 日分)

底辺

2010 年 8 月 25 日

はじめに

昨日に引き続き ril さんが上げてくれた過去問を解いてみました。ただ、やはり合っている保証はないので (ry
取り敢えず、間違いや疑問があれば掲じ (ry
馬さんからの指摘に沿って修正。ありがとうございます。

1

(1) まず、普通にポテンシャルエネルギーを求めます。

$$V(x) = -\int 2aD(\exp(-2ax) - \exp(-ax))dx$$

$$= D\left(\exp(-2ax) - 2\exp(-ax)\right) + C$$

ここで $x \to \infty$ で $V(x) \to \infty$ となるから $C = 0$ と考えてよい。故に

$$V(x) = D\left(\exp(-2ax) - 2\exp(-ax)\right)$$

(2) まず、運動エネルギーを $K(x)$ と置くと $E = V(x) + K(x)$ となる。ここで $K(x)$ が動ける範囲は $0 \leq K(x)$ となるから $0 \leq E - V(x)$ として、さらに $\exp(-ax) = X$(ただし $X > 0$) とおいて考えると

$$0 \leq E - DX^2 + 2DX$$

これを解くと、

$$1 - \sqrt{1 + \frac{E}{D}} \leq X \leq 1 + \sqrt{1 + \frac{E}{D}}$$

ここで場合分けを考える。
(i)$-D \leq E \leq 0$ のとき
両辺とも 0 以上となるので、単純に解いて

$$-\frac{\log\left(1 + \sqrt{1 + \frac{E}{D}}\right)}{a} \leq x \leq -\frac{\log\left(1 - \sqrt{1 + \frac{E}{D}}\right)}{a}$$

(ii)$0 < E$ のとき
この時左辺は 0 未満になるので $X > 0$ と考えると

$$-\frac{\log\left(1 + \sqrt{1 + \frac{E}{D}}\right)}{a} \leq x \leq \infty$$

という形になる。

(3) ここでは運動エネルギーが $K(x) = \frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2$ であることを利用する。
$E = 0$ より $V(x) + K(x) = 0$
$\therefore$ ($V(x) = \frac{D}{y^2} - \frac{2D}{y}$ より)

$$\frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2 = \frac{2D}{y} - \frac{D}{y^2}$$

また、$x = \frac{\log y}{a}$ より

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{ay}\frac{dy}{dt}$$

これを上の式に代入して整理すると

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{4a^2yD}{m} - \frac{2a^2D}{m}$$

$\therefore$

$$\frac{dy}{dt} = \pm 2a\sqrt{\frac{D}{m}}\sqrt{y - \frac{1}{2}}$$

(4) まずは (3) の微分方程式を解きます。

変形します。

$$\left(y-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}dy=\pm 2a\sqrt{\frac{D}{m}}dt$$

$\therefore$

$$\left(y-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\pm a\sqrt{\frac{D}{m}}t+C$$

ここで初期条件を (3) の答えの式に代入すると $x(0)=-\frac{\log 2}{a}$ となることがわかります。ゆえに $y(0)=\frac{1}{2}$ となることから $C=0$ であることがわかります。よって

$$y-\frac{1}{2}=\frac{a^2D}{m}t^2$$

$\therefore$

$$y=\frac{a^2D}{m}t^2+\frac{1}{2}$$

$\therefore$

$$x(t)=\frac{\log\left(\frac{a^2D}{m}t^2+\frac{1}{2}\right)}{a}$$

2

(1) 運動量保存則より

$$mv=(m+\Delta m)(v+\Delta v)+\Delta m(u-v)$$

整理して

$$m\Delta v+u\Delta m=0$$

(2) 初期条件より $v(m_0)=v_0$
また、上の式を変形して

$$\frac{dv}{dm}=-\frac{u}{m}$$

$\therefore$

$$v=-u\log m+C$$

初期条件を代入して

$$C=v_0+u\log m_0$$

なので

$$v=u\log\frac{m_0}{m}+v_0$$

(3)$x=\frac{m_0}{m}, u=3, v=12$ として (3) の式に代入して解くと

$$x=e^4\fallingdotseq 53$$

従って、約 $\frac{1}{53}$ となる。

3

えーと、(1) と (2) は殆ど同じことを詳しく説明しているページを見つけたので、ここ (PDF) を参照してください。

(3) ここらへんも簡単な説明に留めたいと思います。
(a)x', y' の式に直接代入するだけです。

$$x'=r$$

$$y'=0$$

非慣性系においては静止しています。
(b)

$$x'=r\cos\omega t$$

$$y'=-r\sin\omega t$$

非慣性系においては原点を中心に時計回りに回転しています。