力学解答 (9 月 1 日分)

底辺

2010 年 8 月 29 日

はじめに

　この解答は森松教官から頂いた過去問を自分なりに解いてみたものです。ただし、必要最低限と思われることしか書いていないうえに、合っている保証もないので参考程度にお使いください。もし何か疑問や間違っているところを見つけましたら掲示板にでも書き込んでくれるといいと思います。

1

(1) 万有引力定数を G、地球の質量を M と置くと。
$\frac{1}{2}m{v_e}^2 - G\frac{Mm}{R} = 0$
よって、
$v_e = \sqrt{2gR}$

(2) まず、高さを $z(t)$ とおくと、$z(0) = R$ となり、エネルギー保存則の式は

$$\frac{1}{2}m{v_e}^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}\{z'(t)\}^2 - G\frac{Mm}{z(t)}$$

$\therefore$

$$0 = \frac{1}{2}\{z'(t)\}^2 - G\frac{Mm}{z(t)}$$

$\therefore$

$$z(t)\{z'(t)\}^2 = 2gR^2$$

とおける。
　ここで、$z(t) = A(t + C)^B$ とおくと、

$$z(t)\{z'(t)\} = A^3B^2(t + C)^{3B-2} = 2gR^2$$

となるので、t によらず定数になることに注意すれば $B = \frac{2}{3}$

また、初期条件と合わせて A と C は

$$A = \left(\frac{9gR^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$C = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

となる。従って

$$z(t) = \left(\frac{9gR^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(t + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2R}{g}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

(3) 略（スイマセン

2

(1) 単位時間あたり、単位面積に付着する水蒸気の質量は σ なので、$0 \sim t$ の間に水滴に付着する水蒸気の質量を計算する。半径を $a(t)$ とおけば、雨滴は単位体積あたり ρ の質量を持つから、以下の式が成り立つ。

$$\int_0^t 4\pi\sigma\{a(t)^2\}dt = \frac{4}{3}\pi\rho\{(a(t))^3 - {a_0}^3\}$$

t で微分して、

$$4\pi\sigma\{a(t)^2\} = 4\pi\rho a(t)^2 a'(t)$$

$\therefore$

$$\{\sigma - \rho a'(t)\}a(t)^2 = 0$$

$\therefore$

$$a'(t) = \frac{\sigma}{\rho}$$

よってこれを積分し、初期条件 $a(0) = a_0$ と合わせて考えれば

$$a(t) = a_0 + \frac{\sigma}{\rho}t = a_0 + kt$$

(2) 時間 t における雨粒の質量、速度をそれぞれ $m(t)$ $\left(=\frac{4}{3}\pi\rho(a_0+kt)^3\right), v(t)$ とおくと、時間 $0\sim t$ の間に受ける力積 I は、重力による外力のみを考慮すればいいから

$$I = m(t)v(t) - m(0)v(0) = \int_0^t m(t)gdt$$
$$= \frac{\pi\rho g}{3k}\{(a_0+kt)^4 - {a_0}^4\}$$

(3) 条件より、$a_0=0, v_0=0$ として (2) の式を考えると、$m(t)=\frac{4}{3}\pi\rho(kt)^3$ となるなので

$$m(t)v(t) - 0 = \frac{\pi\rho g}{3k}(kt)^4$$

$\therefore$

$$v_z(t) = \frac{t}{4}g$$

追伸　調べてみたのですが、この問題に対する解答には特に自信がありません。あまりあてにしないほうがいいかもしれません。

3

(1) 角運動量保存則、エネルギー保存則はそれぞれ以下のようになります。

$$l = mr^2\dot{\theta}$$
$$E = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\theta}^2+\dot{r}^2) + \frac{1}{2}kr^2$$

(2) 角運動量保存則より

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$$

これを r が最大・最小の時は $\dot{r}=0$ に注意して、エネルギー保存則の式に代入すると

$$E = \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2$$

$\therefore$

$$r^2 = \frac{mE \pm \sqrt{m^2E^2 - kml^2}}{km}$$

r は 0 以上の実数なので

$$\sqrt{\frac{mE-\sqrt{m^2E^2-kml^2}}{km}} \le r \le \sqrt{\frac{mE+\sqrt{m^2E^2-kml^2}}{km}}$$

ここで上の式の左辺を r_{min}、右辺を r_{max} と置く。

(3) 質点が x 軸上にある時、r が最大なので $\dot{r}=0$ だから、$v_x=0$

また、v_y は v そのものになるから、エネルギー保存則の式を

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kr^2$$

として r に最大値を代入して求めると、

$$v_y = \sqrt{\frac{E-\sqrt{E^2-\frac{kl^2}{m}}}{m}}$$

(4) ヒントより直行座標で解いてみようと思います。（ってか教科書にのっているような感じで極座標で解こうとしたら、自分は詰みました。）

まず、x 軸方向、y 軸方向の運動方程式を立てます。

$$m\ddot{x} = -kr\cos\theta = -kx$$
$$m\ddot{y} = -kr\sin\theta = -ky$$

よって初期条件を $t=0$ において、$x=r_{max}, \dot{x}=0, y=0, \dot{y}=r_{min}\sqrt{\frac{k}{m}}=r_{min}\omega$ として、運動方程式を解くと

$$x = r_{max}\cos\omega t$$
$$y = r_{min}\sin\omega t$$

従って、t を消去すると、

$$\frac{x^2}{{r_{max}}^2} + \frac{y^2}{{r_{min}}^2} = 1$$

となり楕円軌道を描く。