

物理学基礎論 A 平成 21 年度 前期試験問題 (木 2 担当 早田)

以下の問いに答えよ。ただし、解答用紙は 1 枚しか使えないので解答は適度な大きさと、丁寧に書くこと。

(1) $f(x) = \log(1 - x + x^2)^{1/2}$ を $x = 0$ のまわりでテーラー展開せよ。ただし、 x^2 までで良い。

(2) 初期条件 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v$ のもとで時間に関する 2 階の微分方程式 $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$ の解を求めよ。ただし、 $\cos \omega t$ と $\sin \omega t$ が特解であることを使ってよい。

(3) 月、地球の位置関係を図示し、海水の概形を描け。それをもとに、潮の満ち干が起きる理由を簡潔に述べよ。

(4) ケプラーの惑星運動の法則について次の問いに答えよ。

(4-1) 本来は太陽と惑星の両方の運動を求める 2 体問題であるが、 保存則を使うと質量 M の太陽と質量 m の惑星の相対運動に対するニュートン方程式

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{GmM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

を解く問題に帰着する。ここで \mathbf{r} は太陽を原点とする惑星の位置ベクトルである。太陽の質量は地球の質量に比べて極端に大きいため、本来換算質量 を使うべきところを m で置き換えてある。ケプラーの第 2 法則

太陽と惑星を結ぶ線分が一定時間に掃く面積 (面積速度) は等しい。

は の大きさが保存されることから導かれる。また、 の方向が保存されることから運動が 2 次元平面内に限られることが分かる。従って、 保存則を書き下すと

$$\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{GmM}{r} = E \quad (A)$$

が得られる。空欄に入る言葉あるいは式を書け。

(4-2) 2 次元極座標 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を使って (A) を書き換えよ。

(4-3) の大きさを L として、 $u = \frac{1}{r}$ に対する方程式を導き、ケプラーの第 1 法則

惑星の軌道は太陽を 1 つの焦点とする楕円である。

を示せ。

(4-4) ケプラーの第 3 法則

惑星が太陽を 1 周する時間 (周期) の 2 乗と軌道の長半径の 3 乗の比は全ての惑星について同じ値を持つ。

を導き、太陽の質量を決めよ。ただし、地球の軌道の長半径は $1.5 \times 10^{11} \text{m}$ 、ニュートンの万有引力定数は $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$ とせよ。