

$$e = \frac{L^2}{GM^2} \quad e = \sqrt{1 - \frac{2|E|L^2}{G^2 M^2 m^3}} \quad \text{と定義する}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + y^2 = \frac{e^2}{l^2} \Leftrightarrow x = \frac{e}{l} \cos(\theta + \beta) \quad \text{と仮定}$$

ここで β は角度であるため軌道に關し無関係であるから $\beta = 0$ とする。

$$x = \frac{e}{l} \cos \theta \quad \text{より} \quad u - \frac{1}{l} = \frac{e}{l} \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{l}{1 + e \cos \theta} \quad (e < 1)$$

$$\Leftrightarrow v + e r \cos \theta = l$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{v^2 + y^2} + e r = l$$

$$\Leftrightarrow v^2 + y^2 = (l - e r)^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - e^2) v^2 + 2 e l v + y^2 = l^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - e^2) \left(v + \frac{e l}{1 - e^2} \right)^2 - \frac{e^2 l^2}{1 - e^2} + y^2 = l^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - e^2) \left(v + \frac{e l}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = \frac{l^2}{1 - e^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(v + \frac{e l}{1 - e^2} \right)^2}{\frac{l^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{l^2}{1 - e^2}} = 1$$