$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{GmM}{r} \quad \text{—①}$$

(4-3) (4-2)の条件の座標のもとで外積を利用して

$$|\mathbb{L}| = |\mathbb{r}\times\mathbb{P}| = m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) \quad \left(\mathbb{r}=(x,y) \quad \mathbb{P}=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)\right)$$

※

$$= mr\cos\theta\left\{\sin\theta\frac{dr}{dt} + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right\} - mr\sin\theta\left\{\cos\theta\frac{dr}{d\theta} - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right\}$$

$$= mr^2\frac{d\theta}{dt} = L$$ (ただしLは角運動量)

よって $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$ を①に代入して

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - \frac{GmM}{r} \quad \text{—②}$$

$$\left(E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + U(r)\right)$$

今 $u = \frac{1}{r}$ より $r = \frac{1}{u}$ および $\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}$ となる。これを②に代入して

$$E = \frac{1}{2}m\frac{1}{u^4}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{m}u^2 - GmMu$$ (ただし $E>0$ とする)

一方で $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{m}u^2$ と $\frac{du}{d\theta} = \frac{\left(\frac{du}{dt}\right)}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}$ より $\frac{du}{dt} = \left(\frac{du}{d\theta}\right)\left(\frac{L}{m}u^2\right)$ となる。

したがって $E = \frac{1}{2}m\cdot\frac{1}{u^4}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\left(\frac{L}{m}u^2\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{L^2}{m}\cdot u^2 - GmMu$

$$= \frac{L^2}{2m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{L^2}{2m}\cdot u^2 - GmMu$$

☆ $\Leftrightarrow \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left(u - \frac{GMm^2}{L^2}\right)^2 = \frac{G^2M^2m^4}{L^4}\left(1 - \frac{2|E|L^2}{G^2M^2m^3}\right)$