利水システム工学レポート

問題

土砂吐水路流入工の勾配 i について次式を導け。

$$i = \frac{1}{l_1}\left(h + \frac{h_c^3}{2h^2} - 1.5h_c\right) + \frac{n^2 g h_c^3}{h_m^{\frac{10}{3}}}$$

解答

土砂吐水路上流部の断面 I および断面 II についてベルヌーイの定理より、

$$\frac{v_c^2}{2g} + h_c + il_1 = \frac{v^2}{2g} + h + h_f \tag{1}$$

となる。これを i について解くと、

$$i = \frac{1}{l_1}\left(\frac{v^2}{2g} + h + h_f - h_c - \frac{v_c^2}{2g}\right) \tag{2}$$

となる。

いま、取水位より、

$$H = 1.5h_c = \frac{v_c^2}{2g} + h_c \tag{3}$$

がなりたつ。この式より、

$$v_c = \sqrt{gh_c} \tag{4}$$

となる。

また、単位幅流量が等しいことから、断面 I と断面 II においては、

$$v_c h_c = vh \Rightarrow v = \frac{h_c}{h}v_c = \frac{g^{\frac{1}{2}} h_c^{\frac{3}{2}}}{h} \tag{5}$$

が成り立つ。ここで、式 (5) においては式 (4) を代入した。

以上から式 (2) に式 (3)、式 (5) を代入して整理すると、

$$i = \frac{1}{l_1}\left(h + \frac{h_c^3}{2h^2} - 1.5h_c\right) + \frac{h_f}{l_1} \tag{6}$$

となる。

いま、$\frac{h_f}{l_1}$ の項について考える。ダルシー・ワイスバッハの式より、f を摩擦損失係数とすると、h_f は、

$$h_f = f \cdot \frac{l_1}{R} \cdot \frac{v_m^2}{2g} \tag{7}$$

とかける。ただし、ここで、$v_m = \frac{v+v_c}{2}$ であり、R は径深である。

一方で、マニングの等流公式を用いると、

$$v_m = \frac{1}{n} \cdot R^{\frac{2}{3}} i^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

と書ける。

式 (8) を i について解くと、

$$i = n^2 v_m^2 R^{-\frac{4}{3}} \tag{9}$$

となる。一方で、勾配 i は明らかに、

$$i = \frac{h_f}{l_1} \tag{10}$$

である。

式 (10) に式 (7) を代入したうえで、式 (9) と等しいことを利用すると、

$$n^2 v_m^2 R^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{l_1} \cdot f \cdot \frac{l_1}{R} \cdot \frac{v_m^2}{2g} \tag{11}$$

$$\Longleftrightarrow f = 2gn^2 R^{-\frac{1}{3}} \tag{12}$$

となり、摩擦損失係数 f が求められる。これより、

$$h_f = 2gn^2 R^{-\frac{1}{3}} \frac{l_1}{R} \frac{v_m^2}{2g} \tag{13}$$

となる。

単位幅流量は同様に等しいので、

$$v_m h_m = v_c h_c \tag{14}$$

$$\Rightarrow v_m = \frac{h_c}{h_m} v_c \tag{15}$$

$$\Rightarrow v_m = \frac{h_c}{h_m} \sqrt{g h_c} = \frac{g^{\frac{1}{2}} h_c^{\frac{3}{2}}}{h_m} \tag{16}$$

となる。

径深 R はこの場合、h_m に近似できることから、このことと式 (16) を用いて式 (13) を書き換えると、

$$h_f = 2g \cdot n^2 \cdot h_m^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{l_1}{h_m} \cdot \frac{1}{2g} \frac{g h_c^3}{h_m^2} \tag{17}$$

$$= g \cdot n^2 \cdot l_1 \frac{h_c^3}{h_m^{\frac{10}{3}}} \tag{18}$$

となり、式 (18) のように h_f は整理される。

この h_f を式 (6) に代入すると、

$$i = \frac{1}{l_1}\left(h + \frac{h_c^3}{2h^2} - 1.5h_c\right) + \frac{n^2 g h_c^3}{h_m^{\frac{10}{3}}} \tag{19}$$

となり、求めるべき式が導ける。